Implicit Function Theorem

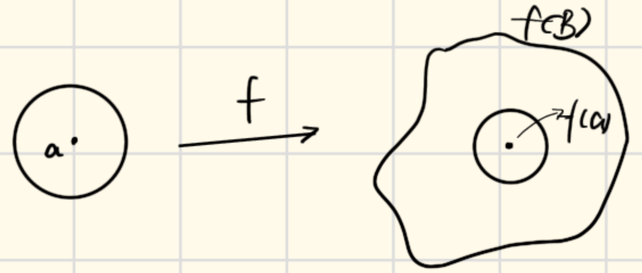
一. 点集引理. 铺垫

TH1. 令 $B=B(\vec{a};r)$, $\partial B=\{\vec{x}:\|\vec{x}-\vec{a}\|=r\}$, $\overline{B}=B\cup\partial B$

假定 $f=(f_1,\cdots,f_n)$ 在 $\overline{B}$ 连续, 各偏导 $D_j f_i(x)$ 在 B 存在.

且 $f(x)\neq f(\vec{a})$ 若 $\vec{x}\in\partial B$; $J_f(x)\neq 0$ 对于 $x\in B$.

则 $\exists\ B(f(a);r')$ et. $B(f(a),r')\subseteq f(B)$



proof. (思路) 考虑 $g(x)=\|f(x)-f(\vec{a})\|>0$, 由于 ∂B 为紧集, $g(x)$ 存在最小值 m.

考虑 $T=B(f(a);\frac{m}{2})$, 我们证明 $T\subseteq f(B)$, 即证 $y\in T\to y\in f(B)$ 永真.

* 构造 $h(x)=\|f(x)-y\|$. (我们想要找到 $x\in B$ 使 $f(x)=y$)

接下来证明 $h(x)$ 在 B 内部取到最小值. (在 $\overline{B}$ 上一定有, 因为是紧致集)

首先, $h(a)=\|f(a)-y\|<m/2$ 故最小值一定小于 $m/2$.

但在 ∂B 上的 x, $h(x)=\|f(x)-f(a)+f(a)-y\|\geq\|f(x)-f(a)\|-\|f(a)-y\|$

$>g(x)-\frac{m}{2}\geq\frac{m}{2}$.

故不在 ∂B 取最小值, 故在 B 内部取最小值. 记该点为 c

此处 $h^2(x)=\sum_{r=1}^{n}[f_r(x)-y_r]^2$ 也取得最小值. 故 $D_k h^2(x)=0$

$\Rightarrow\sum_{r=1}^{n}(f_r(c)-y_r)D_k f_r(c)=0$, 对于 $k=1,2,\cdots,n$.

又因为 $J_f(c)\neq 0$. 故 $f_r(c)-y_r=0\Rightarrow f(c)=y\Rightarrow y\in f(B)$

$\Rightarrow T\subseteq f(B)$

TH2. (开映射定理) 令A为R^n上的开集, $f:A\to R^n$连续, 具有有限偏导D_jf_i

若 f 在A是单的 且 $J_f(x)\neq 0$; 则f(A)是开集.

「可联想到 1-D 情形:  ✓  × 」「似乎在一般的点集拓扑中只需单的+开集」

proof. (思路) f(A)上的每一个点都可用TH1构造一个球⇒每点都是内点⇒开集.

TH3. 假定 f 在R^n上的开集S上有连续偏导D_jf_i; 在S上存在一点 a 有 $J_f(a)\neq 0$;



则存在一个开球B(a)使得f在B(a)上是双射.

proof. (思路)

- 构建辅助函数 $h(Z)=\det[D_jf_i(Z_i)]$, 其中 $Z=(Z_1,\cdots,Z_n)$, Z_i为R^n中的一个点,

注意到 I. 当$Z_1=\cdots=Z_n=a$, $h(Z)=J_f(a)\neq 0$

II. h(Z)是连续的 $\Rightarrow \exists B(a)$, 使 $Z=(Z_1,\cdots,Z_n)$ $Z_i\in B(a)$, 有 $h(Z)\neq 0$

若不是双射, 则存在 $x\neq y \wedge f(x)=f(y) \Rightarrow f_i(x)-f_i(y)=0$

由中值定理. $f_i(x)-f_i(y)=\sum_{j=1}^{n} D_jf_i(Z_i)(x_j-y_j)=0$

$\Rightarrow [D_jf_i(Z_i)]\cdot(x-y)=0$ 由. $h(Z)\neq 0$ ⇒该方程组有唯一解 $x-y=0$

$\Rightarrow x=y$. 矛盾

故是双射.

TH4. 设 A 是 R^n 上的开集；并假定 $f: A \to R^n$ 在 A 上有连续偏导 $D_j f_i$.

若 $\forall x \in A (J_f(x) \neq 0)$，则 f 是开映射.

proof.（思路） 对任意 x，存在 $B(x) \in A$ 且 f 在 $B(x)$ 上为双射 $\Rightarrow$ $f(B(x))$ 为开集

$\Rightarrow f(A) = \bigcup_{x \in A} f(B(x))$ 为开集.

二、反函数定理.

THS. 令 $f = (f_1, \cdots, f_n)$ 在 $S \in R^n$ 上连续可微，令 $T = f(S)$. 若存在 $a \in S$ 有 $J_f(a) \neq 0$.

则存在两个开集 $X \subseteq S$ 与 $Y \subseteq T$ 以及一个唯一确定的函数 g 使得：

a) $a \in X \wedge f(a) \in Y$

b) $Y = f(X)$

c) f 在 X 上是双射

d) g 定义在 Y 上，$g(Y) = X$，$\forall x \in X (g[f(x)] = x)$

e) g 是 Y 上的连续可微函数.

证明思路见下页.（直观上，$J_f(a) \neq 0$ 故在邻域内“坡度”处处不为零，因此“单调”，“可逆”）

proof.(思路)

(a)(b)(c)(a)：存在一个开球$B_1(a)$使得$J_f(x)$在$B_1(a)$处处不为0. 在$B_1(a)$上存在开球$B(a)\subseteq B_1(a)$且f在$B(a)$上为双射. 令B为以a为中心半径小于$B(a)$的开球，则$f(B)$包含一个以$f(a)$为中心的开球，记为Y.

令$X=f^{-1}(Y)\cap B$，$\Rightarrow X$是开集.(a,b可证)

由于$\overline{B}$为紧的且f在$\overline{B}$是连续双射，故存在g使$g[f(x)]=x$(定义在$f(B)$上)

由于$X\subseteq\overline{B}$，$Y\subseteq f(\overline{B})$，把定义域限制在$Y$上即可证明$d$.

(c)：考虑$y,y_0\in Y$；$x,x_0\in X$，满足$y=f(x)$，$x=g(y)$. 令$\Delta y=y-y_0$，$\Delta x=x-x_0$

有$\Delta y = Df(x_0)\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\|\Delta x\|$

$\Rightarrow [Df(x_0)]^{-1}\Delta y=\Delta x+[Df(x_0)]^{-1}\varepsilon(\Delta x)\|\Delta x\|$

$\Rightarrow \Delta g=\Delta x=[Df(x_0)]^{-1}\Delta y-[Df(x_0)]^{-1}\varepsilon(\Delta x)\|\Delta x\|$

而$\dfrac{\|[Df(x_0)]^{-1}\varepsilon(\Delta x)\|\Delta x\|\|}{\|\Delta y\|}=\|Df(x_0)^{-1}\|\,\|\varepsilon(\Delta x)\|\dfrac{\|\Delta x\|}{\|\Delta y\|}\to 0$.

故g在y_0处可微，$Dg(y_0)=[Df(x_0)]^{-1}$.

由$[Df(x)]^{-1}$的连续性可推知$Dg(y)$的连续性

故$g\in C'$

「Apostol原书使用了类似下的证明的严格构造；此处换用了另一个也较好理解的方式」

三. 隐函数定理.

Notation. R^{n+k} 上的点用 $(x;t)$ 表示，其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$t=(t_1,\cdots,t_k)$

TH. 令 $f=(f_1,\cdots,f_n)$ 是定义在 R^{n+k} 的开子集 S，值空间为 R^n 的向量值函数. 假定 $f\in C'$.

令 $(x_0;t_0)$ 为 S 上的一点且满足 $f(x_0;t_0)=0$ 且 $\det[D_j f_i(x_0;t_0)]\neq 0$ ($n\times n$ 的行列式)

则存在一个包含 t_0 的 k 维开集 T_0 与唯一一个向量值函数 $g: T_0\to R^n$ 使得：

a) $g\in C'$.

b) $g(t_0)=x_0$.

c) $f(g(t);t)=0$ 对于 T_0 上的点 t 成立.

proof.(思路).

定义函数 $F: R^{n+k}\to R^{n+k}$ 满足：$F(x;t)=(f(x;t);t)$ (不太严谨的描述...) $\Rightarrow$ 记作 $F=(f,I)$

可以证得 $J_F(x;t)$ 与 $\det[D_j f_i(x;t)]$ 相等 (上三角分块矩阵)

$\Rightarrow J_F(x_0;t_0)\neq 0$，$F(x_0;t_0)=(0;t_0)$

由上文逆映射定理，存在包含 $(x_0;t_0)$，$(0;t_0)$ 的对应的 X，Y.，以及逆映射 $G\in C'$

其中，G 可分为两部分：$G=(v;w)$　　$v: Y\to R^n$. $w: Y\to R^k$. 下面对二者进行分开讨论.

* $v[F(x;t)]=x$　　$w[F(x;t)]=t$.

由于 F 是双射，可构造 $(x;t)=F(x';t)$.

$\Rightarrow v(x;t)=v[F(x';t)]=x'$，$w(x;t)=t$ $\Rightarrow G$ 可被描述.

$\Rightarrow F[G_t(x;t)] = F[v(x;t);t] = (x;t)$. 对于任意 $(x;t)\in Y$ 成立.

现构造 $T_0 = \{t; t\in R^k, (0;t)\in Y\}$, $g(t) = v(0;t)$

则 $g(t_0) = v(0,t_0) = x_0$ $(F(x_0;t_0) = (0;t_0))$

$F[g(t);t] = F(v(0,t);t) = (0;t)$

$\Rightarrow f(g(t);t) = 0$. 口.